

Chapitre 1 :

Arithmétique

(1^{ère} partie)

I– Le point sur les nombres

Rappel :

- 1 ; 3 ; 10 ; 15 ; sont des nombres entiers naturels.
- 1 ; 3 ; 10 ; 15 ; -1 ; -30 ; -128 sont des nombres entiers relatifs.
- 1,2 ; 2,6 ; 15,28 ; sont des nombres décimaux.

Définition : Les nombres rationnels sont les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b des entiers relatifs et $b \neq 0$.

Exemples :

- $\frac{10}{3}$ est un nombre rationnel
- 7 est un nombre rationnel car $7 = \frac{7}{1}$
- 0,5 est un nombre rationnel car $0,5 = \frac{1}{2}$

Définition : Les nombres irrationnels sont les nombres qui ne sont pas rationnels.

Exemples :

- π (se lit « PI ») est un nombre irrationnel, la calculatrice ne fournit qu'une valeur approchée du résultat.
- $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, sont aussi des nombres irrationnels.

II – Divisibilité

1) Critères de divisibilité

Propriété :

Un nombre est divisible par 2 s'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8.

Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Un nombre est divisible par 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.

Un nombre est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5.

Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Un nombre est divisible par 10 si son dernier chiffre est un 0.

Exemple :

174 est divisible par 3.

En effet, $1 + 7 + 4 = 12$ et 12 est divisible par 3.

2) Diviseurs

Définition : d est un diviseur de a s'il existe un nombre entier n tel que $a = d * n$.

Exemples :

- 3 est un diviseur de 15 car $15 = 3 * 5$
- 10 n'est pas un diviseur de 35 car $35 = 10 * 3,5$ et que 3,5 n'est pas un entier !!!
- liste des diviseurs de 18 : $\{1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18\}$

Vocabulaire : Pour dire que d est un diviseur de a on peut aussi dire que :

- d divise a
- a est un multiple de d
- a est divisible par d

Définition : Dire que d est un diviseur commun de a et b signifie que d divise a et b .

Exemples :

- 5 est un diviseur commun de 15 et 30 car $15 = 5 * 3$ et $30 = 5 * 6$
- 10 n'est pas un diviseur commun de 40 et 53 car $40 = 10 * 4$ mais que $53 = 10 * 5,3$ et 5,3 n'est pas un entier.

Propriété : Un nombre entier positif admet au moins 2 diviseurs : 1 et lui même.

3) Nombres premiers entre eux

Définition : Dire que a et b sont premiers entre eux signifie que 1 est le seul diviseur commun de a et b.

Exercices :

- 15 et 27 sont – ils premiers entre eux ?

Liste des diviseurs de 15 : {1 ; 3 ; 5 ; 15}

Liste des diviseurs de 27 : {1 ; 3 ; 9 ; 27}

3 est un diviseur commun à 15 et 27 donc 15 et 27 ne sont pas premiers entre eux.

- 12 et 35 sont – ils premiers entre eux ?

Liste des diviseurs de 12 : {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12}

Liste des diviseurs de 35 : {1 ; 5 ; 7 ; 35}

Le seul diviseur commun à 12 et 35 est 1 donc 12 et 35 sont premiers entre eux.

4) Décomposition d'un nombre en produits de facteurs premiers

Propriété :

Tout nombre non premier peut se décomposer en produits de facteurs premiers.
Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.



Méthode : Décomposer un nombre en produits de facteurs premiers

Décomposer 300 en produits de facteurs premiers.

Pour le faire, il est important de bien connaître le début de la liste des nombres premiers :
2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

On commence pas tester si **300** est **divisible par 2** (1^{er} nombre premier).

La réponse est « oui » car **300** se termine par un chiffre pair.

Et on a : **300 : 2 = 150**

$$\begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ \hline 150 & \end{array}$$

On recommence, en testant si **150** est **divisible par 2**.

La réponse est « oui » et **150 : 2 = 75**

$$\begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ \hline 150 & 2 \\ \hline 75 & \end{array}$$

On recommence, en testant si **75** est divisible par 2.

La réponse est « non » !

On teste alors le nombre premier suivant dans la liste.

Est-ce que **75** est **divisible par 3**.

La réponse est « oui » car $7+5=12$ est divisible par 3.

Et on a : **75 : 3 = 25**

$$\begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ \hline 150 & 2 \\ \hline 75 & 3 \\ \hline 25 & \end{array}$$

On recommence, en testant si **25** est divisible par 3.

La réponse est « non » !

On teste alors le nombre premier suivant dans la liste.

Est-ce que **25** est **divisible par 5**.

La réponse est « oui » et on a **25 : 5 = 5**.

$$\begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ \hline 150 & 2 \\ \hline 75 & 3 \\ \hline 25 & 5 \\ \hline 5 & \end{array}$$

On recommence, en testant si **5** est **divisible par 5**.

La réponse est « oui » et on a **5 : 5 = 1**.

$$\begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ \hline 150 & 2 \\ \hline 75 & 3 \\ \hline 25 & 5 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline 1 & \end{array}$$

C'est fini, on trouve **1** !

La décomposition en facteurs premiers de 300 se lit dans la colonne de droite.

$$300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$$