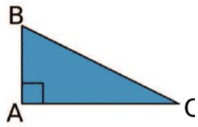
Chapitre 4 : Le théorème de Pythagore

I – Théorème de Pythagore :

Si un triangle est rectangle,
alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

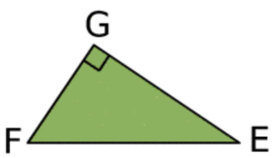
<table>
<tr>
<td>Si ABC est un triangle rectangle en A

</td>
<td>Alors on a l'égalité :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$</td>
<td>Théorème en mode RAP</td>
</tr>
</table>

II – Application : Calcul de longueur

Exemple 1 :

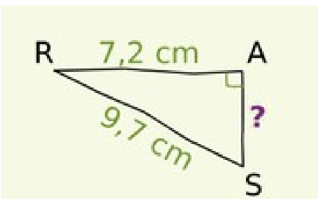
Soit EFG un triangle rectangle en G tel que GE = 7 cm et GF = 6 cm.
Calcule FE.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Le triangle EFG est rectangle en G, son hypoténuse est le côté [FE].
D'après le théorème de Pythagore, on a :
$FE^2 = GE^2 + GF^2$
$FE^2 = 7^2 + 6^2$
$FE^2 = 49 + 36$
$FE^2 = 85$
$FE = \sqrt{85}$ → valeur exacte
$FE \approx 9{,}22$ cm → valeur approchée au centième

</td>
</tr>
</table>

Exemple 2 :

Soit RAS un triangle rectangle en A tel que RS = 9,7 cm et AR = 7,2 cm.
Calcule la valeur exacte de AS

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Le triangle RAS est rectangle en A, son hypoténuse est le côté [RS].
D'après le théorème de Pythagore, on a :
$RS^2 = AR^2 + AS^2$
$9{,}7^2 = 7{,}2^2 + AS^2$
$94{,}09 = 51{,}84 + AS^2$
$AS^2 = 94{,}09 – 51{,}84$
$AS^2 = 42{,}25$
$AS = \sqrt{42{,}25}$ $AS = 6{,}5$cm</td>
</tr>
</table>

III – Démontrer qu'un triangle est rectangle.

Réciproque du théorème de Pythagore:

Si, dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés,

alors ce triangle est rectangle et admet ce plus grand côté pour hypoténuse.

Remarque : On utilisera la réciproque du théorème de Pythagore pour montrer qu'un triangle est rectangle lorsque l'on connaîtra la longueurs des 3 côtés de ce triangle.

Exemple :

Soit IJK un triangle tel que JK = 7,5 cm, JI = 6 cm et IK= 4,5 cm.

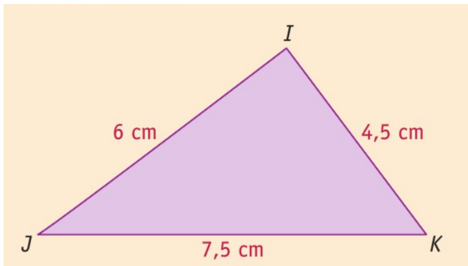
Dans le triangle IJK, le plus long côté est [JK].

$JK^2 = 7,5^2 = 56,25$

$JI^2 + IK^2 = 6^2 + 4,5^2 = 36 + 20,25 = 56,25$

Donc $JK^2 = JI^2 + IK^2$

Donc, d'après le théorème de Pythagore, le triangle IJK est rectangle en I et son hypoténuse est [JK].



IV – Démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle.

Exemple :

Soit EFG un triangle tel que EF= 3 cm, EG = 3,5 cm et FG = 4,5cm.

Démontre que le triangle EFG n'est pas un triangle rectangle.

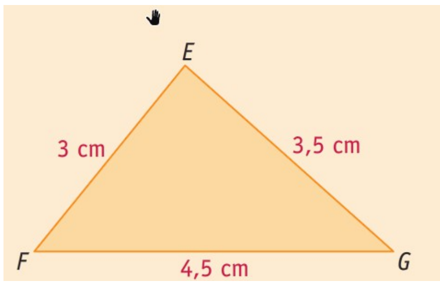
Le plus long côté est [FG] :

$FG^2 = 4,5^2 = 20,25$

$EF^2 + EG^2 = 3^2 + 3,5^2 = 9 + 12,25 = 21,25$

On constate donc que $FG^2 \neq EF^2 + EG^2$

Donc d'après le théorème de Pythagore, le triangle EFG n'est pas rectangle.



Remarque : Dans cette exemple ci-dessus, nous avons utilisé la contraposée du théorème de Pythagore pour montrer que le triangle n'était pas rectangle.